Activité 1 : Algèbre de Boole

I. Les opérations booléennes

Définition 1

Au XIXème siècle, un mathématicien et logicien anglais, George Boole, a développé une structure algébrique permettant de manipuler les propositions logiques au moyen d'équations mathématiques où les énoncés VRAI et FAUX sont représentés par les valeurs 1 et 0.
L'algèbre de Boole est constituée de :
— deux éléments : 0 et 1, respectivement Faux et Vrai ;
— deux opérations binaires : ET et OU, notées respectivement ∧ et ∨ ;
— une opération unaire : NON notée ¬ ou ¯.

Une opération booléenne est entièrement définie par sa table de vérité, table dont chaque ligne affiche une combinaison des variables d'entrée et fournit en regard le résultat correspondant.

— **OU** : La **disjonction de** A **et** B est notée : $\boxed{A \text{ or } B}$, $\boxed{A+B}$, $\boxed{A \bigvee B}$.
A or B vaut True si et seulement si A vaut True ou B vaut True.

A	B	A or $B = A+B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

— **ET** : La **conjonction de** A **et** B est notée : $\boxed{A \text{ and } B}$, $\boxed{A \cdot B}$, $\boxed{A \bigwedge B}$.
A and B vaut True si et seulement si A vaut True et B vaut True.

A	B	A and $B = A.B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

— **La négation de** A est notée $\boxed{\text{not } A}$ ou encore $\boxed{\overline{A}}$.
$\overline{A}$ vaut True si et seulement si A vaut False.

A	not $A = \overline{A}$
0	
1	

L'algèbre de Boole est à la base du fonctionnement des ordinateurs. Les 0 et 1 du langage binaire correspondent à ceux de la logique booléenne et physiquement à un courant faible ou fort dans les circuits de l'ordinateur. Les opérateurs ET, OU et NON existent eux aussi physiquement dans l'ordinateur sous forme de composants appelés portes logiques.

L'algèbre de Boole permet aussi d'étudier la valeur de vérité de propositions – à savoir quand elles sont vraies ou fausses – formulées à l'aide des connecteurs logiques ET, OU et NON. Ce qui est à la base des raisonnements mathématiques.
Remarque : on peut observer des similitudes entre OU et l'addition et ET et la multiplication. En effet, dans le cas de ET, on obtient le même résultat que pour la multiplication ; il en va de même pour OU à l'exception de 1 OU 1 qui renvoie 1 et non 2.
Les similitudes vont même plus loin puisque on retrouve la priorité du ET sur le OU, la distributivité du ET sur le OU et donc la possibilité de factoriser (à l'instar de × et +). Enfin, 1 est un élément neutre pour ET (comme pour la multiplication) et 0 pour OU (comme pour l'addition). On obtient le comparatif dans la propriété suivante.

Booléens $(\{0;1\};\vee;\wedge)$	**Réels** $(\mathbb{R};+;\times)$
$A \vee B = B \vee A$	$a+b=b+a$
$A \wedge B = B \wedge A$	$a \times b = b \times a$
$\wedge$ *est prioritaire sur* $\vee$	$\times$ *est prioritaire sur* $+$
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
$1 \wedge A = A$ *(1 élément neutre pour ET)*	$1 \times a = a$ *(1 élément neutre pour* $\times$*)*
$0 \wedge A = 0$	$0 \times a = 0$
$0 \vee A = A$ *(0 élément neutre pour OU)*	$0 + A = A$ *(0 élément neutre pour* $+$*)*
$1 \vee A = 1$	

Exercice 1.1

Compléter les égalités suivantes.

$A \text{ or } A = \dots$ $\quad A \text{ and } A = \dots$ $\quad \text{not}(\text{not } A) = \dots$ $\quad A \text{ or } (\text{not } A) = \dots$ $\quad A \text{ and } (\text{not } A) = \dots$

Exercice 1.2

Formules de Morgan

1. Compléter les tables de vérité ci-dessous.

A	B	$A \text{ or } B$	$\overline{A \text{ or } B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \text{ and } \overline{B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

2. En déduire que $\overline{A \text{ or } B} = \overline{A} \text{ and } \overline{B}$.
3. Montrer de même que $\overline{A \text{ and } B} = \overline{A} \text{ or } \overline{B}$.

II. Les fonctions booléennes

Définition 2

Une expression booléenne est une combinaison d'opérations élémentaires (or, and, not) portant sur une ou plusieurs variables booléennes.
Réciproquement, toutes les fonctions booléennes peuvent être obtenues par combinaison des opérateurs NON, OU et ET.

Exemple : considérons la fonction booléenne : f (A ; B) = $(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$. On obtient sa table de vérité en trouvant chacune des tables intermédiaires des fonctions qui compose f puis en appliquant les règles des ET, OU et NON ci-dessus.

A	**B**	**A ∧ B**	**¬ A**	**¬ B**	**(¬ A) ∧ (¬ B)**	**f(A;B)**
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Réciproquement, il est possible de déterminer l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité. Pour cela, il faut faire la « somme (ou) » de tous les « produits (et) » ayant pour valeur 1. En effet, une fonction étant uniquement déterminée par l'ensemble de ses images, les « produits » ne valant que 0 ou 1 et leur « somme » valant 1 dès l'un le vaut, on obtient ainsi les mêmes images que dans table de vérité. Toutefois, l'expression obtenue est rarement sous forme réduite et nécessite de l'être pour une utilisation optimale.

Considérons la table de vérité suivante :

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Exercice 1.3

1. Dresser la table de vérité de l'expression $S = (A \text{ or } B) \text{ and } (\overline{A} \text{ or } B)$.

A	B	A or B	$\overline{A}$	$(\overline{A}$ or $B)$	S
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

2. Quelle égalité booléenne peut en déduire ?

Exercice 1.4

Dresser la table de vérité de l'expression $S = (A \text{ and } B) \text{ or } (A \text{ and not } C) \text{ or } (\text{not } B \text{ and } C)$.

A	B	C	A and B	A and not C	not B and C	S
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Exercice 1.5

On donne ci-dessous les tables de vérité de différentes expressions booléennes U, V et W.
Retrouver les expressions de U, V et W en fonction de A et B.

A	B	U
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	V
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	W
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

III. Implication

L'implication entre deux propositions A et B est symbolisée par A ⇒ B et se traduit en français par :
— A implique B ;
— si A alors B ;
— A est une condition suffisante de B ;
— B est une condition nécessaire de A.
Sa définition booléenne est : A ⇒ B = (¬A) ∨ B.

Remarques :
— On dit que A est une condition suffisante de B car il suffit d'avoir A pour avoir B.
— On dit que B est une condition nécessaire de A car on ne peut pas avoir A sans avoir B ; si on a A, on a nécessairement B.
— L'implication B ==⇒ A est dite implication réciproque de l'implication A ==⇒ B ; ce n'est pas parce que l'une des deux implications est vraie que l'autre l'est aussi.

Propriété Soient A et B deux propositions à valeurs booléennes. Si l'implication A ⇒ B est vraie, alors l'implication (¬B) ==⇒ (¬A) est vraie aussi ; il s'agit de l'implication contraposée.

Remarque : les implications sont à la base des instructions conditionnelles : si mes conditions sont vérifiées, alors j'effectue les instructions associées. Il est donc important de bien comprendre leurs propriétés et leur fonctionnement.

IV. Opérations bit à bit

On peut généraliser les opérations logiques and et or à des chaînes de bits ce que python peut faire facilement. Sous python :
— le *and* se note &
— le *or* se note |

— **Bit à bit : and se note &**

	1	0	1	1	0	1	1
&	1	0	1	0	1	0	1
	1	0	1	0	0	0	1

```
# Dans la console PYTHON
>>> bin(0b1011011&0b1010101)
'0b1010001'
```

— **Bit à bit : or se note |**

	1	0	1	1	0	1	1
|	1	0	1	0	1	0	1
	1	0	1	1	1	1	1

```
# Dans la console PYTHON
>>> bin(0b1011011|0b1010101)
'0b1011111'
```

Exercice 2.6

Calculer à la main puis avec python :

— 1111001 & 1110100

— 1111001 | 1110100

V. Obtention des fonctions normales

1. **Forme normale conjonctive (FNC)** : Une fonction booléenne peut toujours s’exprimer sous forme d’une conjonction (and) de formes disjonctives (or) .
Par exemple : f (a, b, c) = (a + b + c).(a + b + c).(a + b + c)

2. **Forme normale disjonctive (FND)** : Une fonction booléenne peut toujours s’exprimer sous forme d’une disjonction (or) de formes conjonctives (and) .
Par exemple :g (a, b, c) = abc + abc

Méthode

Il existe cependant un moyen d’obtenir les FND ou FNC facilement en travaillant sur la table de vérité. On s’intéresse aux différents cas où la fonction retourne 0 ou 1.

a	b	c	$f(a,b,c)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

— **Obtenir la FND**
Pour la FND, on s’intéresse aux cas pour lesquels la fonction vaut 1 et on écrit la conjonction des littéraux (les *midterms*) correspondante :

1. $a = b = 1$ et $c = 0$.
   Ce premier cas donne la conjonction $a.b.\overline{c}$, et la table de vérité nous dis que celle-ci donne 1 lorsque $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$, or $1.1.\overline{0} = 1$.
2. On a aussi $a = 1$ et $b = 0$, soit $c = 1$ et on a la conjonction $a.\overline{b}.c$;
3. On a aussi $a = 1$ et $b = 0$, soit $c = 0$ et on a la conjonction $a.\overline{b}.\overline{c}$

Pour avoir la (FND) on prend la disjonction des conjonctions :

$$\boxed{f(a,b,c) = a.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.\overline{b}.\overline{c}}$$

— **Obtenir la FNC**
On s’intéresse aux cas où la fonction vaut 0 (qu’on appelle des *maxterms*) , et de la même manière, on note les différentes conjonctions correspondantes.

$$\overline{f(a,b,c)} = a.b.c + \overline{a}.b.c + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$$

Si on en prend la conjonction, la propriété assure que $\overline{\overline{f(a,b,c)}} = f(a,b,c)$:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{f(a,b,c)}} = f(a,b,c) &= \overline{a.b.c + \overline{a}.b.c + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}} \\ &= \left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right).\left(a+\overline{b}+\overline{c}\right).\left(a+\overline{b}+c\right).\left(a+b+\overline{c}\right).\left(a+b+c\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(a,b,c) = \left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right).\left(a+\overline{b}+\overline{c}\right).\left(a+\overline{b}+c\right).\left(a+b+\overline{c}\right).\left(a+b+c\right)}$$

Exercice 3.7

L'opération « ou exclusif », noté xor, est défini par A xor B = (A or B) and $\overline{A \text{ and } B}$.

1. Dresser la table de vérité de l'expression A xor B.
2. En déduire la forme normale disjonctive de A xor B.

A	B	A or B	A and B	$\overline{A \text{ and } B}$	A xor B = (A or B) and $\overline{A \text{ and } B}$
0	0	0			
0	1	1			
1	0	1			
1	1	1			

Exercice 3.8

On donne ci-dessous les tables de vérité de différentes expressions booléennes U, V et W.
Retrouver les expressions de U, V et W en fonction de A et B et C.

A	B	C	U
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	V
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	W
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Exercice 3.9

Question 1

Si A et B sont des variables booléennes, quelle est l'expression booléenne équivalente à (not A) or B ?

— (A and B) or (not A and B) or (not A and not B)

— (A and B) or (not A and B)

— (not A and B) or (not A and not B)

— (A and B) or (not A and not B)

Exercices

Exercice 1. On note :
— E : « le pokémon est de type eau » ;
— G : « le pokémon est de type glace » ;
— V : « le pokémon est de type vol ».

Écrire en français les propositions suivantes.
1. E ∨ G ∨ V ; 2. E ∧ G ∨ V ; 3. (E ∨ G) ∧ V .

Exercice 2. Dresser la table de vérité de f et g définies par :

1. $f(A;B) = (A \vee B) \wedge (A \wedge B)$; 2. $g(A;B) = (A \vee B) \vee (A \wedge B)$.

A	B			$f(A;B)$

A	B			$g(A;B)$

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f .

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Exercice 4. L'opérateur XOR (exlusive or), noté ⊕, est très utilisé en électronique, en informatique et en cryptographie. Voici une fonction booléenne équivalente :

$$A \oplus B = ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)).$$

Dresser sa table de vérité.

XOR						
A	B	$\neg A$	$\neg B$			$A \oplus B$

Exercice 5. Construire la table de vérité de la fonction suivante :

$$f(A;B;C) = (A \wedge B) \vee ((\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge (\neg C)).$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge B$	$(\neg B) \wedge C$	$A \wedge (\neg C)$	$f(A;B;C)$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Exercice 6. [Démonstrations] Démontrer chacune des égalités suivantes en dressant la table de vérité des deux membres puis en vérifiant l'égalité de celles-ci. Soient A, B, C trois booléens.

1. $1 \vee A = 1$.
2. $0 \vee A = A$.
3. $1 \wedge A = A$.
4. $0 \wedge A = 0$.
5. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
7. $\neg (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f .

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 8. [Interrupteurs]
1. Quand deux interrupteurs sont en parallèle, la lumière s'allume quand l'un d'eux est fermé.
2. Quand ils sont en série, la lumière s'allume quand les deux sont fermés.
3. Quand ils sont en va-et-vient, la lumière s'allume quand les deux sont fermés ou les deux sont ouverts.

On pose :

— In est à 0 quand l'interrupteur n est ouvert.
— In est à 1 quand l'interrupteur n est fermé.

Dresser la table de vérité de la fonction booléenne de chacun des trois cas ci-dessus puis exprimer ces fonctions à l'aide d'opérateurs booléens.

I_1	I_2	Parallèle

I_1	I_2	Série

I_1	I_2	Va-et-vient

Exercice 9. [Je mens] Sur une planète vivent les Purs (qui disent toujours la vérité) et les Pires (qui mentent toujours). Vous croisez deux personnes A et B sur cette planète. A affirme :
« Au moins l'un de nous deux est un Pire ». Notons :
a : « A est un Pur » ;
b : « B est un Pur ».
À l'aide d'une table de vérité, dire ce que sont A et B.

Exercice 10. [Logique royale] Alors que vous déambuliez tranquillement dans les rues de la glorieuse cité de Vérité, capitale du non moins glorieux pays Booléen, vous êtes arrêté pour tentative de corruption sur l'un des Poneys Royaux. Le témoignage du Poney Royal est accablant, vous ne pouvez échapper à votre sort et allez être conduit devant le Roi George 1 –dit le Vrai –, afin d'être jugé.

Amené dans la salle du trône, vous avez devant vous le Roi George et sa cour de booléens. Le procureur du Roi, implacable, commence son réquisitoire, témoignage du Poney Royal à l'appui. Votre culpabilité, évidente, va être actée, la sentence royale prononcée. Le procès se déroule sous votre regard flou et votre oreille sourde.

Alors que le tumulte ayant suivi la fin du réquisitoire s'affaiblit, le Roi George se lève et le silence se fait. Il annonce vouloir vous mettre à l'épreuve. Devant vous sont apportés deux coffres. Le Roi vous explique que chaque coffre contient soit un 1, soit un 0. Si vous choisissez un coffre avec un 1, votre peine sera commuée en travaux d'intérêts équestres, sinon vous serez jeté en pâture aux Caribous Belliqueux. Afin de vous mettre encore plus à l'épreuve, les deux coffres contiennent parfois tous deux un 1, mais aussi parfois tous deux un 0 et parfois l'un contient un 1 et l'autre un 0.

Le Roi George, sûr de sa supériorité, vous donne par ailleurs des indications. Voici les inscriptions notées sur les coffres :
Coffre 1 (I1) : « Il y a un 1 dans ce coffre et un 0 dans l'autre. »
Coffre 2 (I2) : « Il y a un 1 dans l'un des coffres et un 0 dans l'autre. »

Enfin, le sourire aux lèvres, le roi vous annonce qu'une seule des deux inscriptions est correcte. On note
C1 : « La coffre 1 contient un 1. »
C2 : « La coffre 2 contient un 1. »
1. Traduire les affirmations I1 et I2 inscrites sur les portes à l'aide des propositions C1 et C2 et des connecteurs logiques (et, ou , non).
2. Dresser la table de vérité des affirmations I1 et I2 à partir de C1 et C2.
3. Conclure sur le choix que vous devez faire afin de ne pas finir jeté en pâture aux Caribous.

Exercice 11. [Logique royale, retour en enfer] Après avoir échappé au supplice des Caribous Belliqueux et fini vos travaux d'intérêts équestres, et alors que vous vous apprêtiez à quitter la glorieuse capitale de Vérité, vous êtes capturé par le terrible groupe des Mouettes Renégates. Celles-ci vous ligotent et bâillonnent avant de vous entraîner dans les souterrains de la ville. Après un temps indéterminé, vos ravisseuses vous libèrent et vous découvrez ainsi que vous êtes en plein cœur du légendaire palais d'ombre, résidence de George 0 – dit le Faux –, jumeau maléfique de George 1. Celui-ci veut vous entraîner dans son complot visant à destituer son frère. Mais pour être certain que vous êtes apte à participer à cette dangereuse entreprise, il désire d'abord vous éprouver.
Il place alors devant deux coffres et vous explique qu'il va vous soumettre à la même épreuve que son frère afin d'être sûr que vous ne l'avez pas réussi par hasard. Les deux indications sur les coffres sont les suivantes.
Coffre 1 (I1) : « Au moins l'un des deux coffres contient un 1. »
Coffre 2 (I2) : « L'autre coffre contient un 0. »
Il vous prévient, choisissez le bon coffre car sinon vous serez jeté en pâture aux Mouettes Renégate